

## Fibres optiques

### Première partie

#### Étude géométrique d'une fibre optique à saut d'indice

##### 1.1. Approximation de l'optique géométrique :

**1.1.1.** L'approximation de l'optique géométrique consiste à ce que la longueur d'onde utilisée soit négligeable par rapport aux dimensions caractéristiques du dispositif optique. Si cela est vérifié, le phénomène de diffraction est négligeable.

**1.1.2.** Dans le coeur de la fibre d'indice  $n_1$  :

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_o}{n_1} = 1,6 \mu m \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\lambda} \simeq 94$$

On est, donc, à la limite d'une telle approximation. La longueur d'onde  $\lambda_o$  appartient au domaine de l'infra-rouge (I.R).

##### 1.2.

**1.2.1.** Lois de Snell-Descartes pour la réfraction :

- Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence (plan contenant le rayon incident).
- Soit  $i_1$  et  $i_2$ , respectivement, l'angle d'incidence et de réfraction sur un dioptre optique ( $D$ ). Soit  $n_1$  et  $n_2$  les indices respectifs des milieux (1) et (2) séparés par ( $D$ ) :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

On parle de la réflexion totale ( aucun rayon réfracté n'est observable) lorsque l'onde lumineuse passe d'un milieu plus réfringent (indice supérieur) à un milieu moins réfringent (indice inférieur).

L'angle d'incidence  $i_1$  est, donc, supérieur à un angle limite  $\Lambda$  tel que :  $n_1 \sin \Lambda = n_2$  ; ( $i_2 = \pi/2$ ).

soit  $\sin \Lambda = \frac{n_2}{n_1}$

**1.2.2.** Le rayon incident sur le dioptre entre le coeur et la gaine, de la fibre, est totalement réfléchi si  $\theta_i > \Lambda$ .

La lumière peut être guidée dans le coeur de la fibre s'elle subie des réflexions successives sur le dioptre séparant la gaine et le coeur. Il faut, donc, se placer dans les conditions de réflexion totale ; soit :

$$\begin{cases} n_o \sin \theta_i = n_1 \sin \theta \\ \text{et } \frac{\pi}{2} - \theta_i > \Lambda \end{cases}$$

Pour  $\theta_i = \theta_a \rightarrow \pi/2 - \theta_i = \Lambda$ ; soit :

$$\sin \theta_a = n_1 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \Lambda \right) = n_1 \cos \Lambda = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \Lambda} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

1.2.3. Application numérique :  $\theta_a = 22^\circ 15'$

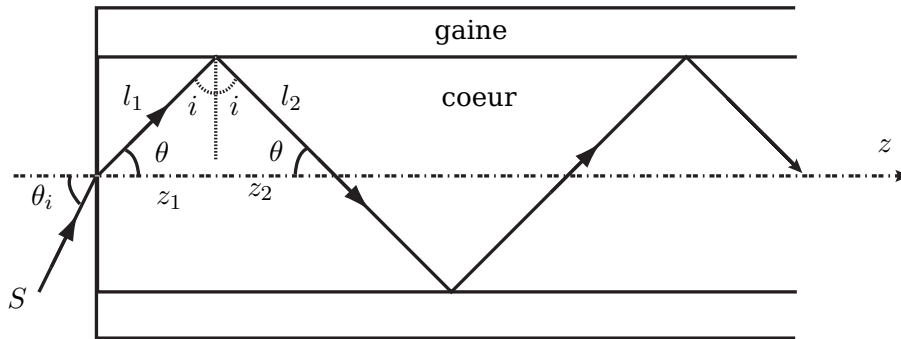
1.2.4. Ouverture numérique :

$$ON = \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta} \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$$

1.2.5. En utilisant la question 1.2.2,  $\theta_{lim}$  est tel que :  $\sin \theta_{lim} = \cos \Lambda = n_1 \sqrt{2\Delta}$

1.3.

1.3.1.



1.3.2.

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{z_1}{l_1} \\ \cos \theta = \frac{z_2}{l_2} \end{cases} \Rightarrow z_i = l_i \cos \theta \quad \text{et} \quad z = \sum_i z_i = \sum_i l_i \cos \theta = l \cos \theta$$

$$\text{Avec} \quad l = \sum_i l_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = \frac{z}{\cos \theta}}$$

1.3.3. Le chemin optique c'est le chemin parcouru par la lumière dans le vide pendant la durée de sa propagation dans le milieu considéré :

$$c_o dt = n_1 dl \quad \Rightarrow \quad \int_{(\tau)} c_o dt = \int_{(l)} n_1 dl \quad \Rightarrow \quad c_o \tau(\theta, z) = n_1 l = n_1 \frac{z}{\cos \theta}$$

$$\text{Soit} \quad : \quad \boxed{\tau(\theta, z) = n_1 \frac{z}{c_o \cos \theta}}$$

On pourra utiliser la démarche suivante :  $\tau = l/v$  et  $v = c/n_1$  ; d'où le résultat.

1.3.4. Expression de  $\Delta\tau$  :

$$\begin{cases} \text{Pour } \theta = 0 \text{ le temps de detection} : t_o = \tau(0, z) = n_1 \frac{z}{c_o} \\ \text{Pour } \theta = \theta_{lim} \text{ le temps de detection} : t_1 = \tau(\theta_{lim}, z) = t_o + \Delta\tau = n_1 \frac{z}{c_o \cos \theta_{lim}} \end{cases}$$

$$\text{Ce qui donne} : \quad \boxed{\Delta\tau = \Delta t = t_1 - t_o = n_1 \frac{z}{c_o} \left( \frac{1}{\cos \theta_{lim}} - 1 \right)}$$

1.4.

1.4.1.

1.4.2. Expression de la valeur minimale  $T_m$  :

$$T_m = \Delta\tau \quad \text{et} \quad \cos \theta_{\text{lim}} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{\text{lim}}} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{Cf. 1.2.5}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_m = n_1 \frac{z}{c_0} \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right)}$$

A grande distance, il y a risque de chevauchement des signaux.

1.4.3. Application numérique :

$$\boxed{T_m = 0,17 \mu\text{s}}$$

Le débit maximal :

$$\boxed{D_{\text{max}} \frac{1}{T_m} = 6 \times 10^6 \text{ impulsions par seconde}}$$

Faible distance - Grand débit !!

## Deuxième partie Modes d'une fibre optique

2.1. Théorème de Malus-Dupin

Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

2.2. Déphasage  $\Delta\varphi$  :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi n_1}{\lambda} P_i P_{i+1} = \frac{8\pi}{\lambda_0} a \sin \theta}$$

2.3. La condition d'interférences constructives est telle que la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde ou le déphasage est un multiple de  $2\pi$ .

$$\Delta\varphi = 2\pi m \lambda \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin \theta_m = \frac{m\lambda_0}{4n_1 a}}$$

2.4. L'ordre  $m$  existe si  $|\sin \theta_m| \leq \sqrt{2\Delta}$ ; soit :

$$\boxed{a \geq \frac{|m| \lambda_0}{4n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}}$$

2.5. Nombre  $N$  de modes :

D'après ce qui 2.4 :

$$|m| \leq \frac{4an_1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{N = 2E(k) + 1} \\ E(k) : \text{partie entière de } k \end{cases}$$

Application numérique  $\boxed{N = 195}$

2.6. Non, la détection est *indépendante* du signe de  $m \in \mathbb{Z}$ .

2.7. Pour une fibre monomode ( $N = 1$ ), d'où la quantité  $E(k) = 0$  ou  $|m| < 1$ ; d'où le résultat suivant :

$$a < a_{\max} = \frac{\lambda_o}{4an_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

2.8. Application numérique :

$$a_{\max} = 1,02 \mu m$$

2.9. Pour une telle fibre (monomode), la valeur de  $a$  est faible, ce qui correspond à un faible élargissement des impulsions, d'où transmission de maximum d'énergie (informations).

### Troisième partie Gyromètre optique

#### 3.1. Effet Sagnac

3.1.1. L'interféromètre étant au repos. Le temps  $\delta t_o$  que mettent les ondes (1) et (2) pour faire un tour, à la vitesse  $c_o$ , vaut :

$$\delta t_o = \frac{2\pi R}{c_o}$$

3.1.2. L'interféromètre est en rotation. Le rayon (1) parcourt dans le sens de rotation voit son chemin rallongé avant d'arriver à l'écran ( $E$ ) : en effet, pendant qu'il effectue un tour, le détecteur en ( $E$ ) s'est déplacé d'une longueur :

$$d_1 = R\Omega\delta t_o = \frac{2\pi R^2}{c_o}\Omega$$

Il faut, donc, parcourir cette distance supplémentaire par rapport à l'interféromètre (immobile). Le rayon (2) doit parcourir tout le chemin *moins* cette distance ((2) voit le détecteur se rapproché et déplacé d'une longueur  $d_2 = -d_1$ ). La différence de marche  $\Delta l$  est donc :

$$\Delta l = 2d_1 = \frac{2\pi R^2}{c_o}\Omega$$

3.1.3. Les deux ondes (1) et (2) partent au même instant de ( $S_p$ ). L'onde (1) (*sens de rotation*) va voir un parcours plus long, alors que l'onde (2) va avoir un parcours plus court.

Considérons par  $\delta t_1$  et  $\delta t_2$  les durées de propagations respectives des trajets des deux ondes (1) et (2).

- Pendant  $\delta t_1$ , l'onde (1) parcourt la distance  $L_1 = c_o\delta t_1 = 2\pi R + r\Omega\delta t_1$ .
- Pendant  $\delta t_2$ , l'onde (2) parcourt la distance  $L_2 = c_o\delta t_2 = 2\pi R - r\Omega\delta t_2$ .

Finalelement :

$$\delta t_1 = \frac{2\pi R}{c_o} + \frac{R\Omega}{c_o}\delta t_1 \quad \text{et} \quad \delta t_2 = \frac{2\pi R}{c_o} - \frac{R\Omega}{c_o}\delta t_2$$

Ou :

$$\boxed{\delta t_1 = \delta t_o + \frac{R\Omega}{c_o} \delta t_1} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta t_2 = \delta t_o - \frac{R\Omega}{c_o} \delta t_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta t_1 = \frac{\delta t_o}{1 - \frac{R\Omega}{c_o}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta t_2 = \frac{\delta t_o}{1 + \frac{R\Omega}{c_o}}}$$

### 3.1.4. Différence de phase $\Delta\varphi$ :

La différence de phase entre les deux ondes :  $\Delta\varphi = \omega_o(\delta t_1 - \delta t_2)$  Soit : (avec  $\omega_o$  la pulsation de l'onde)

$$\Delta\varphi = \omega_o \left( \frac{4\pi R^2 \Omega}{c_o^2 - R^2 \Omega^2} \right) \approx \omega_o \left( \frac{4S\Omega}{c_o^2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_o} c_o \left( \frac{4S\Omega}{c_o^2} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{8\pi S\Omega}{\lambda_o c_o}}$$

### 3.1.5. Application numérique :

$\Omega(s^{-1})$	$10^{-8}$	$10^{-1}$	$10^2$
$\Delta\varphi(rad)$	$3,3 \times 10^{-11}$	$3,3 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-1}$

Les deux premières valeurs de  $\Delta\varphi$  sont inexploitable par les instruments de mesure actuels. La troisième valeur est la seule qui pourra être mesurer avec précision.

## 3.2. Gyromètre à fibre optique

### 3.2.1. Principe

#### 3.2.1.1. Déphasage $\Delta\Phi$ :

$$\boxed{\Delta\Phi = N \Delta\varphi = \frac{8\pi NS}{\lambda_o c_o} \Omega}$$

#### 3.2.1.2. Signal $s(t)$ :

$$\boxed{s(t) = \alpha I(t) = \alpha \frac{I_o}{2} (1 + \cos \Delta\Phi) s_o \left( 1 + \cos \left( \frac{8\pi NS}{\lambda_o c_o} \Omega \right) \right)}$$

#### 3.2.1.3. Déphasage supplémentaire $\pi/2$

$$s'(\Omega) = s \left( \Delta\Phi + \frac{\pi}{2} \right) = s_o \left( 1 - \sin \left( \frac{8\pi NS}{\lambda_o c_o} \Omega \right) \right)$$

Pour les faibles valeurs de  $\Omega$  :

$$\boxed{s'(\Omega) = s_o \left( 1 - \frac{8\pi NS}{\lambda_o c_o} \Omega \right)}$$

### 3.2.2. Sensibilité aux effets extérieurs

#### 3.2.2.1.

#### 3.2.2.2.

- Avantage : La fibre très longue permet la mesure de faibles vitesse angulaires.
- Inconvénient : La linéarité su signal est limitée.

#### 3.2.2.3.

$\Omega(s^{-1})$	$10^{-8}$	$10^{-1}$	$10^2$
$\Delta\varphi(rad)$	$2,6 \times 10^{-7}$	2,6	$2,6 \times 10^3$

- La linéarité du signal n'est pas valable pour les deux dernières valeurs de  $\Omega$ .
- La première valeur est mesurable.